

Utilisation de relations non associées en mécanique des structures

P. Verpeaux¹, C. Berthier², A. Millard³

¹ DES/ISAS/DM2S/SEMT, Commissariat à l'Energie Atomique, Pierre.Verpeaux@cea.fr

² DES/ISEC/DMRC/SASP/LSPS, Commissariat à l'Energie Atomique, clement.berthier@cea.fr

³ Anciennement DES/ISAS/DM2S/SEMT/LM2S, Commissariat à l'Energie Atomique, Alain.millard.mail@gmail.com

Résumé — Les conditions aux limites de type Dirichlet s'introduisent à l'aide de relations linéaires portant sur les inconnues primales du problème, et de forces de liaisons permettant de les vérifier. Dans le cas de systèmes conservatifs, les forces de liaisons sont duales des inconnues soumises à condition et s'expriment à l'aide de la transposée de la relation.

Il est possible de généraliser ces conditions au cas où les forces de liaisons sont arbitraires, ce qui conduit à des matrices non symétriques.

Mots clefs — Dirichlet, Lagrange, Contrôle

1. Rappel sur les conditions de Dirichlet

Le calcul de structures en statique repose sur la résolution d'équations différentielles associées à des conditions aux limites, et nécessite dans la majorité des cas le recours à une méthode numérique approchée, basée sur la recherche de champs solutions appartenant à un espace admissible réduit V_r . Dans les cas conservatifs, il s'agit par exemple de trouver le minimum de l'énergie potentielle totale de la structure parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles appartenant à V_r , c'est-à-dire vérifiant a priori des conditions de Dirichlet, non homogènes dans le cas le plus général, sur une partie $\partial\Omega_1$ de la frontière du domaine étudié :

$$\min_{q \in V_r} \left(\frac{1}{2} q^T K q - q^T F \right)$$

$$V_r = \{q : Aq = b \text{ sur } \partial\Omega_1\}$$

La condition de minimisation s'écrit :

$$dq^T K q - dq^T F = 0$$

Le respect de l'admissibilité des déplacements passe par l'introduction de forces de liaison F_l telles que :

$$F + F_l = Kq$$

Ce qui permet de réécrire la condition de minimisation sous la forme :

$$dq^T F_l = 0$$

Etant donné que dq vérifie $Adq = 0$, nécessairement F_l est de la forme suivante :

$$F_l = -A^T \lambda$$

Où λ désigne le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, qui constituent autant d'inconnues supplémentaires. Les vecteurs q et λ sont alors donnés par l'extremum du potentiel modifié suivant :

$$\Omega' = \frac{1}{2} q^T K q - F^T q + \lambda^T (Aq - b)$$

$$\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial q} \right)^T = 0 \Rightarrow Kq - F + A^T \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow Aq - b = 0$$

On résout finalement le système matriciel total :

$$\begin{pmatrix} K & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ b \end{pmatrix}$$

La solution vérifie trivialement les conditions de Dirichlet. Ces conditions sont dites associées car les forces de liaison $-A^T \lambda$ en sont duales.

2. Problèmes non conservatifs

2.1. Conditions non associées

On considère à présent une structure chargée d'une part par un chargement F connu et d'autre part par un chargement dont l'intensité est contrôlée par une contrainte cinématique non homogène de la forme $Aq = b$:

$$Kq = F + \lambda G^T$$

En s'inspirant de la formulation associée précédente, on adjoint λ aux inconnues du problème, et on utilise le formalisme des multiplicateurs de Lagrange. Le système à résoudre devient donc :

$$\begin{pmatrix} K & -G^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ b \end{pmatrix}$$

Le système n'est plus symétrique, ce qui est inévitable car il n'est pas conservatif. La relation n'est pas associée car la réaction n'est plus duale de la condition. On peut en donner l'interprétation physique suivante :

-Dans une relation associée, la vérification de la relation est assurée par l'introduction de forces de liaison, encore appelées réactions. La minimisation de l'énergie mécanique du système impose la forme de la réaction. C'est la transposée de la relation.

-Dans une relation non associée, les forces de liaison sont arbitraires mais servent de la même façon à vérifier la relation.

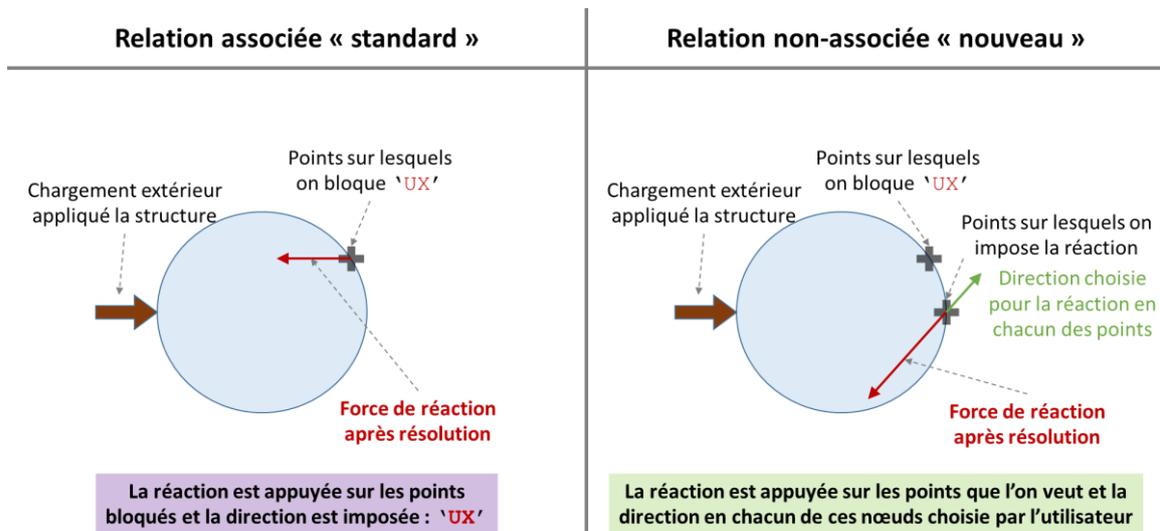


Figure 1 : Mise en évidence des différences entre une relation associée et non-associée

2.2. Contrôle

Application au pilotage : on définit une relation non associée dont la partie primale est la condition à vérifier et la partie duale le vecteur force de contrôle. Dans Cast3M, c'est une raideur. On l'ajoute à la raideur mécanique du système puis on résout le système linéaire global. Le multiplicateur λ de la force de contrôle est directement solution du problème.

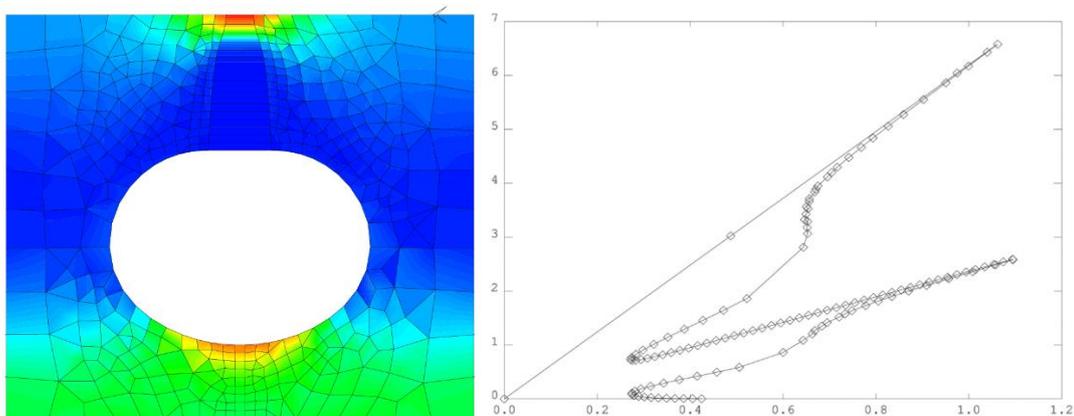


Figure 2 : Exemple de courbe charge déplacement sur une plaque trouée. La charge est obtenue comme réaction sur la condition de déformation imposée.

- Remarque 1 : Il est trivial de définir plusieurs conditions et plusieurs vecteurs de contrôle.
- Remarque 2 : Il peut être intéressant de piloter sur plusieurs grandeurs simultanément, par exemple le maximum des déformations. Pour ce faire, on peut utiliser les relations non associées sous forme unilatérale, en définissant une relation unilatérale par grandeur pilotée, toutes avec le même vecteur de contrôle, et en imposant le maximum de ces relations. Dans ce cas, le vecteur force permettant de définir la relation contrôlant la déformation d'un élément n'est autre que le produit de la raideur de cet élément par le champ de déplacements.

2.3. Frottement de Coulomb

On rappelle la définition du contact-frottement de Coulomb : La condition de contact dans la direction normale s'écrit :

$$D_n^T q \geq 0$$

Soit il y a décollement et un jeu positif, soit il y a contact et il y a deux réactions : une réaction normale R_n et une réaction tangentielle R_t liées par la relation :

$$|R_t| < \mu |R_n|$$

En adjoignant les deux multiplicateurs de Lagrange λ_n et λ_t aux inconnues du problème, le contact-frottement est donc décrit par les deux conditions unilatérales suivantes :

- Condition normale : $\begin{pmatrix} 0 & D_n & -\mu D_t \\ D_n^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$
- Condition tangentielle : $\begin{pmatrix} 0 & D_t \\ D_t^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda_t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ce qui donne le système complet non symétrique : $\begin{pmatrix} K & D_n & -\mu D_t & D_t \\ D_n^T & 0 & 0 & 0 \\ D_t^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda_n \\ \lambda_t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La direction D_t inconnue doit être actualisée au cours des itérations, soit à l'aide du déplacement tangentiel, soit à l'aide de la réaction tangentielle. Cette dernière est donnée par $(\lambda_t - \mu \lambda_n) D_t$, tandis que la réaction normale est donnée par $\lambda_n D_n$

- Remarque 3 : l'écoulement sur une condition de frottement étant non associé (de façon à imposer son incompressibilité), il n'est pas étonnant de voir apparaître une condition non associée sous la forme matricielle. Par ailleurs, il est bien connu que la matrice tangente du système dans le cas du frottement de Coulomb est non symétrique.

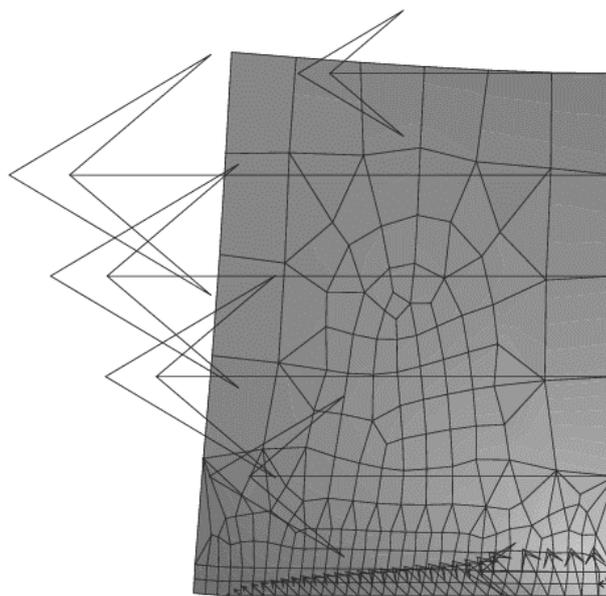


Figure 3 : Exemple de frottement d'un cube. Décollement, glissement, adhérence.

2.4. Changement de phase : cas de la solubilité

En présence d'un gaz soluble dans un liquide (par exemple du monoxyde d'azote NO dans l'eau), il existe une limite de solubilité de ce gaz au-delà de laquelle la phase gaz apparait et coexiste avec la phase solubilisée. Dans le cas parfait, la limite de solubilité ne peut pas être dépassée et la concentration en gaz est nulle au-dessous de cette limite. Les inconnues primales dans cet exemple sont les concentrations des espèces solubles et gazeuses (respectivement $[NO_S]$ et $[NO_G]$) et leurs duales les flux respectifs de matière (Q_{NO_S} et Q_{NO_G}). La limite de solubilité est notée $[NO]_{sat}$.

Mathématiquement, le système matriciel représentant le phénomène de la solubilité s'écrit :

$$\text{Si } [NO_S] + [NO_G] \leq [NO]_{sat} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} [NO_S] \\ [NO_G] \\ \lambda_G \end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} Q_{NO_S} \\ Q_{NO_G} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{Si } [NO_S] + [NO_G] > [NO]_{sat} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} [NO_S] \\ [NO_G] \\ \lambda_S \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} Q_{NO_S} \\ Q_{NO_G} \\ [NO]_{sat} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Suivant le cas, la contrainte porte soit sur la concentration soluble soit sur la concentration du gaz. Les réactions portent toutes sur les flux soluble et gaz de façon à assurer la conservation de la masse. Ces relations sont non-symétriques et non associées. Il est trivial que lorsqu'une de ces deux conditions est réalisée, les flux générés pour respecter les contraintes sont de même module mais ont un signe opposé (ce qui permet de conserver le nombre d'espèces).

La figure 4 décrit les phases de chargement et déchargement pour cet exemple en précisant les relations actives suivant les cas.

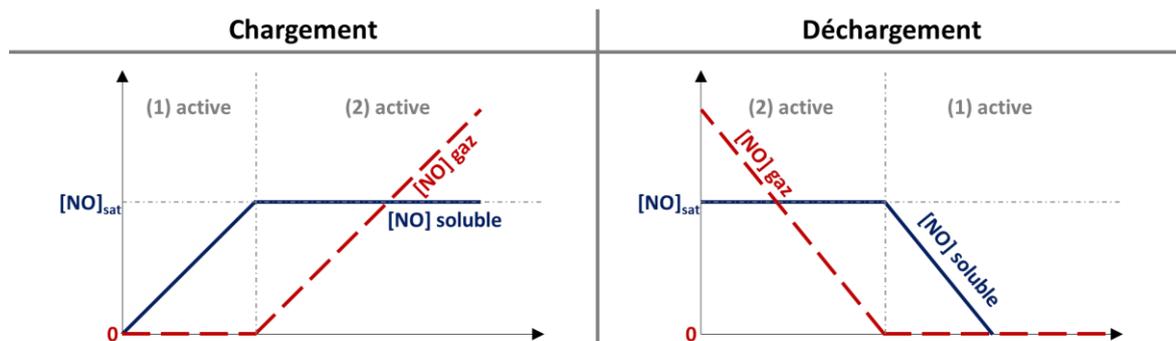


Figure 4 : Schémas de chargement et déchargement en NO en présence d'une limite de solubilité

- Etape de chargement : Tant que la concentration totale est inférieure ou égale à la limite de solubilité, la concentration en NO solubilisé est libre d'augmenter alors que la concentration en NO gaz est fixée égale à zéro. Lorsque la limite de solubilité est atteinte, la concentration en NO solubilisé est fixée et égale à la limite de solubilité alors que la concentration en NO gaz est libre d'augmenter.
- Etape de déchargement : Tant que la concentration totale est strictement supérieure à la limite de solubilité, la concentration en NO gaz est libre de diminuer alors que la concentration en NO soluble est fixée égale à sa limite de solubilité. Lorsque que la concentration en NO gaz est nulle, la concentration en NO soluble est libre de diminuer alors que la concentration en NO gaz est fixée égale à zéro.

3. Conclusion

Cette nouvelle condition aux limites qui dissocie la partie primale et la partie duale de la condition a été implantée dans le code de calcul Cast3M du CEA.

Nous l'avons appliquée à des problèmes simples de pilotage sur des systèmes mécaniques non linéaires où elle a montré une nette amélioration de la robustesse du schéma et une diminution du nombre d'itérations globales.

Nous l'avons aussi appliquée à des problèmes de frottement. En 2D, on obtient généralement une convergence exacte en 2 ou 3 itérations, ce qui est normal car une fois connu le sens de glissement, on résout un problème linéaire. En 3D, la détermination de la direction de glissement est un problème continu et la convergence n'est plus exacte.

Enfin, nous l'avons appliqué à des problèmes de génie chimique avec la solubilité des gaz, ce qui a conduit, outre la réduction des durées de calcul (moins d'itérations), à la simplification des jeux de données pour l'utilisateur (inutile de décrire la partie non-associée de manière explicite dans un second membre).

2.3. Références bibliographiques

Références

- [1] Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique analytique*, t. 1, p. 77-112, 1788
- [2] Numerical Methods in the CASTEM system for the treatment of contact problems involving friction, A Combescure, A Millard & P Verpeaux, J Mec Theor Appl v7 n S p249-276 1988
- [3] Cast3M Web site, <http://www-cast3m.cea.fr>