

Prise en compte des effets de la microstructure en fissuration

S. Riad^{1,2}, D. Bardel², J. Réthoré¹

¹ GeM, Ecole Centrale Nantes, {soukaina.riad, Julien.rethore}@ec-nantes.fr

² Framatome de Lyon, soukaina.riad, didier.bardel@framatome.com

Résumé — La simulation numérique de la fissuration est un enjeu industriel majeur nécessitant la prise en compte de différents facteurs ayant un impact sur le processus global de rupture des matériaux. Dans le cas des métaux, la microstructure polycristalline agit sur les étapes de fissuration et ses caractéristiques induisent des scénarios de rupture variés.

La présente contribution vise à présenter l'apport de la méthode de champs de phase pour la prise en compte de tels phénomènes. Deux approches implémentées via le code aux éléments finis Cast3M sont présentées : via maillage explicite de la microstructure ou via l'utilisation d'une longueur interne de type Cosserat.

Mots clés — fissuration, champs de phase, microstructure.

1 Introduction

La modélisation de l'endommagement est une discipline majeure dans différents domaines industriels, notamment pour les applications critiques où les effets microstructuraux sont de plus en plus inclus dans les analyses de prédiction de durée de vie.

Le présent travail emploie la méthode des champs de phase pour la modélisation de la fissuration, qui est une méthode versatile conçue pour modéliser des systèmes avec des interfaces de discontinuité. Elle consiste à incorporer un champ continu permettant d'effectuer la différenciation entre les phases physiques (fissurée, intacte) d'un système à travers des transitions lisses sur une distance caractéristique ℓ_d [4]. Cette méthode est particulièrement attractive pour sa capacité à simuler les processus complexes de fissuration tels que l'amorçage, la coalescence, le branchement et la multi-fissuration.

Nous proposons dans cette contribution deux approches indépendantes et différentes de l'adaptation du modèle des champs de phase pour prise en compte d'effets de la microstructure :

- Implémentation du modèle de champs de phase dans un milieu à effet d'échelle capable de rendre compte des effets de la microstructure via une longueur interne. Dans ce travail, notre attention s'est portée sur le milieu de Cosserat où des degrés de liberté indépendants de déplacement et de microrotation sont attribués à chaque point matériel [2]. La longueur interne de ce milieu permettra de représenter implicitement des effets d'échelle tels que ceux induits par la taille des grains par exemple. Dans la suite, on appellera cette approche modélisation implicite (de la microstructure). Nous montrerons dans cette partie comment les paramètres du milieu de Cosserat peuvent impacter la trajectoire de fissures via un exemple avec coalescence de fissures.
- Adaptation du modèle des champs de phase pour la simulation de fissuration à l'échelle du polycristal via une représentation explicite de la microstructure. Plusieurs études de la littérature ont abordé ce problème en combinant des modèles cohésifs aux joints de grains avec des modèles d'endommagement pour le cœur du matériau [18]. Dans cette contribution, nous proposons une nouvelle formulation unifiée du problème de fissuration par champs de phase, apte à intégrer les effets de propagation en volume et sur les interfaces [16]. Dans ce formalisme la rupture est considérée anisotrope à l'intérieur du grain avec autant de champs d'endommagement que de directions préférentielles de ruptures. Un champ d'endommagement supplémentaire est dédié aux joints de grains avec une énergie de rupture G_c variable en fonction de la distance aux joints de grains. Ces derniers sont donc considérés comme une interface épaisse dont l'épaisseur (numérique) doit être supérieure au paramètre de régularisation associé à l'énergie de surface des joints de grains. Une prise en compte de l'effet de la désorientation sur le comportement des joints de

grain est aussi envisageable.

Cette contribution vise à démontrer la dépendance des processus de fissuration aux effets de la microstructure pour des matériaux au comportement fragile (par exemple sujets à un problème de corrosion sous contrainte) sollicités dans le domaine élastique.

Pour ce faire, nous présenterons dans la section 2 une revue brève sur la méthode des champs de phase. Dans la section 3 nous expliciterons la formulation des champs de phase dans le milieu de Cosserat et son impact sur la trajectoire de fissuration. Dans la section 4, une adaptation de la méthode des champs de phase à l'échelle du polycristal est présentée afin de modéliser la compétition et les interactions entre les fissurations intergranulaires et transgranulaires en fonction des propriétés de la microstructure, des grains et des joints de grains.

2 Formalisme standard du modèle des champs de phase

Le modèle des champs de phase est un modèle diffus, où la surface fissurée est approximée par un champ d'endommagement d tel que $d = 1$ sur l'interface fissurée Γ et $d = 0$ ailleurs. L'approche variationnelle de fissuration selon [3] définit l'énergie totale d'un système fissuré par :

$$\begin{aligned} E &= E_d + E_s \\ &= \int_{\Omega} g(d)W_d d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(d, \nabla d) d\Omega = \int_{\Omega} W d\Omega. \end{aligned}$$

E_d représente l'énergie élastique stockée dans le système fissuré qui s'exprime par l'intégrale du produit de la densité d'énergie élastique et une fonction de dégradation qui décrit l'endommagement du matériau en fonction de l'évolution du champ de phase d , sa forme est habituellement choisie quadratique [1] telle que :

$$g(d) = (1 - d)^2.$$

E_s est l'énergie nécessaire pour créer une surface libre selon le critère de Griffith, exprimée par l'intégrale du produit de l'énergie nécessaire pour créer une unité de surface G_c et la densité de surface fissurée $\gamma(d)$:

$$\gamma(d) = \frac{1}{2\ell_d} d^2 + \frac{\ell_d}{2} \nabla d \cdot \nabla d. \quad (1)$$

La densité d'énergie libre à minimiser pour le problème des champs de phase est ainsi exprimée par W .

En se basant sur l'inégalité de Clausius-Duhem, la positivité de dissipation conduit à l'équation gouvernante du problème de champs de phase suivante :

$$2(1 - d)\mathcal{H} - \frac{G_c}{\ell_d} (d - \ell_d^2 \Delta d) = 0.$$

où \mathcal{H} est une fonction d'histoire proposée par Miehe et al. [5] qui permet de garder le maximum temporel de la valeur d'énergie motrice d'endommagement afin d'assurer l'irréversibilité du processus d'endommagement.

$$\mathcal{H}(\underline{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \{W_u(\underline{x}, \tau)\} \quad \forall \underline{x} \in \Omega.$$

3 Modèle des champs de phase dans le milieu de Cosserat

Le milieu de Cosserat est un cas particulier des milieux micromorphes [13] où le degré de liberté supplémentaire est limité à la rotation de la microstructure qui peut être décrite par un pseudo-vector $\underline{\Phi}$. Ce milieu continu est donc caractérisé par des champs de déplacement et de microrotation :

$$DOF = \{\underline{u}, \underline{\Phi}\}.$$

Dans le cas général, cette microrotation ne coïncide pas avec la rotation macroscopique définie par la partie antisymétrique du gradient de transformation. De ces champs, deux tenseurs de mesure de

déformation sont générés : le tenseur de déformation relative \underline{e} et le tenseur de torsion-courbure $\underline{\kappa}$, qui ne sont généralement pas symétriques :

$$\begin{aligned}\underline{e} &= \nabla \underline{u} + \underline{\varepsilon} \underline{\Phi}, \\ \underline{\kappa} &= \nabla \underline{\Phi}.\end{aligned}$$

avec $\underline{\varepsilon}$ et ∇ qui décrivent respectivement le tenseur de permutation et l'opérateur gradient. Les mesures de contraintes associées aux taux de déformations sont le tenseur de contrainte-force $\underline{\underline{\sigma}}$ et le tenseur de contrainte-double $\underline{\underline{M}}$ qui doivent satisfaire les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned}div(\underline{\underline{\sigma}}) &= 0, \\ div(\underline{\underline{M}}) - \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{\sigma}} &= 0.\end{aligned}$$

Dans le cadre de l'élasticité, le couple $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{M}})$ est lié à $(\underline{e}, \underline{\kappa})$ par la loi de Hooke généralisée [9]. Pour les matériaux isotropes, la loi est exprimée par six modules élastiques :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \lambda tr(\underline{e}) \underline{I} + 2\mu \underline{e}^s + 2\mu_c \underline{e}^a, \\ \underline{\underline{M}} &= \alpha tr(\underline{\kappa}) \underline{I} + 2\beta \underline{\kappa}^s + 2\gamma \underline{\kappa}^a.\end{aligned}\tag{2}$$

^s and ^a représentent respectivement les parties symétriques et anti-symétriques du tenseur correspondant. λ et μ sont les coefficients de Lamé. μ_c relie les parties anti-symétriques des tenseurs de déformation relative et contraintes-force. α est le module de torsion, β et γ sont les modules de flexion. En 2D, α n'intervient pas, et pour simplifier, on adopte généralement l'hypothèse $\beta = \gamma$ tel que fait dans [14]. Une longueur interne l_s apparaît lorsque le ratio des équations de Eq.(2) est examiné :

$$l_s = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}.$$

Dans le milieu de Cosserat, l'énergie élastique $W_{u,\Phi}$ est composée de l'énergie de déformation relative et de l'énergie de courbure. L'énergie libre à minimiser pour le problème de champs de phase dans le milieu de Cosserat est choisie comme suit :

$$W = g(d)W_{u,\Phi}^+(\underline{e}, \underline{\kappa}) + W_{u,\Phi}^-(\underline{e}, \underline{\kappa}) + G_c \gamma(d, \nabla d).$$

où on décompose l'énergie élastique en une partie motrice d'endommagement $W_{u,\Phi}^+$ relative aux énergies de : traction, cisaillement, partie anti-symétrique de la déformation relative et courbure, tandis que l'énergie $W_{u,\Phi}^-$ est relative à l'énergie de compression et n'affecte pas le processus d'endommagement afin d'éviter les problèmes d'interpénétration des faces de fissures sous chargement de compression normale. Le calcul de cette énergie est fait selon Amor *et al.* [6] comme dans un milieu de Cauchy :

$$\begin{cases} 2W_{u,\Phi}^-(\underline{e}, \underline{\kappa}) = 0 & \text{si } tr(\underline{e}) > 0, \\ W_{u,\Phi}^-(\underline{e}, \underline{\kappa}) = \frac{1}{2} \underline{e} : (k_0 \underline{1} \otimes \underline{1}) : \underline{e} & \text{si } tr(\underline{e}) < 0. \end{cases}$$

où k_0 est le module de compression du matériau non endommagé.

Dans le cadre de la formulation hybride [10], le problème de champs de phase à résoudre dans le milieu de Cauchy pour chaque pas de temps est :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\underline{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \{W_{u,\Phi}^+(u(\underline{x}, \tau), \Phi(\underline{x}, \tau))\}, \\ 2(1-d)\mathcal{H} - \frac{G_c}{l_d} (d - l_d^2 \Delta d) = 0. \end{cases}$$

et le problème de déplacement est le suivant :

$$\begin{cases} \forall \underline{x} : \text{si } W_{u,\Phi}^+ < W_{u,\Phi}^- \text{ donc } d = 0, \\ \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial W(\underline{e}, \underline{\kappa}, d)}{\partial \underline{e}} = (1-d)^2 \frac{\partial W_u(\underline{e})}{\partial \underline{e}}, \\ \underline{\underline{M}} = \frac{\partial W(\underline{e}, \underline{\kappa}, d)}{\partial \underline{\kappa}} = (1-d)^2 \frac{\partial W_\Phi(\underline{\kappa})}{\partial \underline{\kappa}}. \end{cases}$$

Pour mettre en avant l'effet du milieu de Cosserat sur le processus de fissuration, nous avons choisi un problème de coalescence de fissure. La géométrie, les conditions aux limites et chargement, les propriétés matériau dans le milieu de Cauchy (λ et μ) et les paramètres de champs de phase sont choisis à partir de l'article [8].

Fig. 1a montre la trajectoire des fissures qui est en accord avec le résultat de l'étude menée dans [8]. Pour une étude dans le milieu de Cosserat, on fait varier la longueur interne de Cosserat l_s en fixant μ_c et varier β pour montrer l'influence des paramètres de Cosserat sur le processus de coalescence. Pour ce, 4 cas sont étudiés :

- $\beta = 60 \times 10^3 \text{ Pa.m}^2 \implies l_s = 0.86 \times 10^{-3} \text{ m} \implies R = 0.43$,
- $\beta = 240 \times 10^3 \text{ Pa.m}^2 \implies l_s = 1.72 \times 10^{-3} \text{ m} \implies R = 0.86$,
- $\beta = 960 \times 10^3 \text{ Pa.m}^2 \implies l_s = 3.44 \times 10^{-3} \text{ m} \implies R = 1.72$,
- $\beta = 3840 \times 10^3 \text{ Pa.m}^2 \implies l_s = 6.89 \times 10^{-3} \text{ m} \implies R = 3.44$.

où R est défini comme le ratio entre : la distance verticale initiale entre les pré-fissures et la longueur interne de Cosserat l_s . La Fig. 1 montre les trajectoires de fissures en fonction de la variation de R .

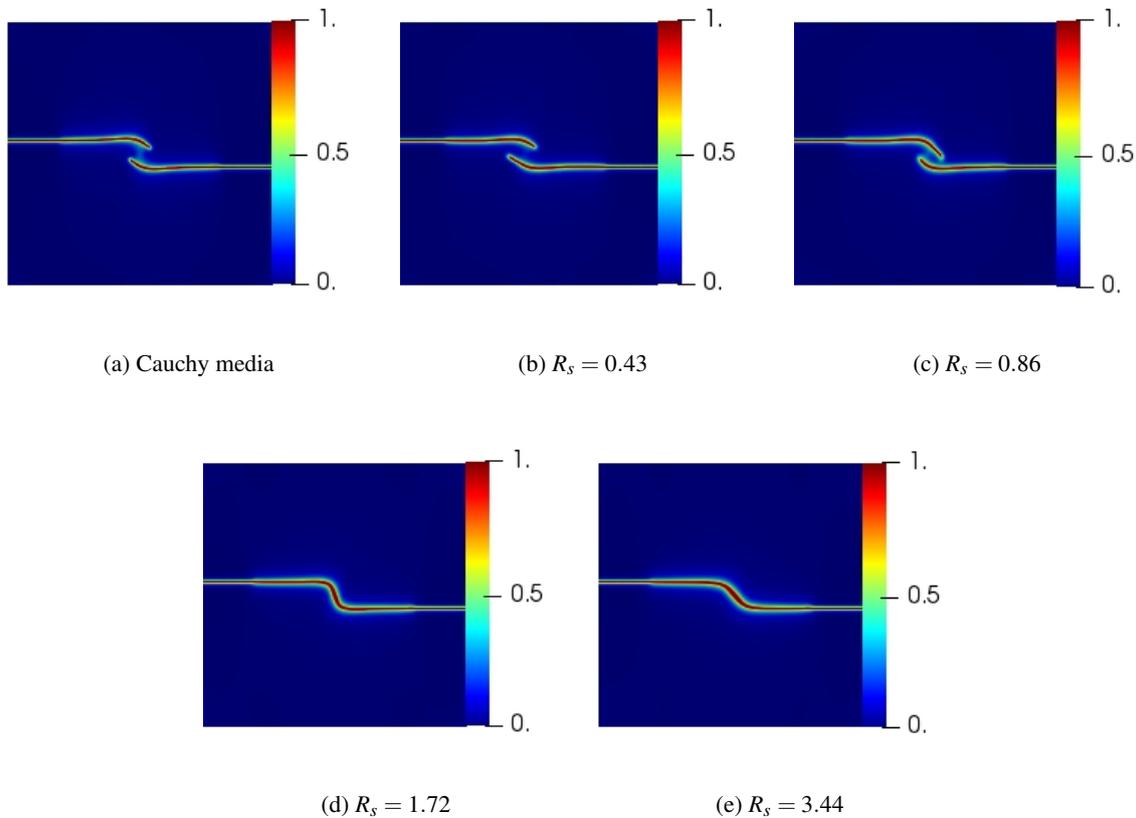


FIGURE 1 – Éprouvette de traction asymétrique à double pré-fissures. Chemins de fissuration dans un milieu de Cauchy (a) et dans le milieu de Cosserat à R différents (b-e).

Ce résultat montre que la longueur interne de Cosserat contrôle les interactions entre les fissures. À partir d'un $R = 0,86$, les effets du milieu de Cosserat commencent à être visible, plus la longueur interne est grande, plus les fissures interagissent tôt et tendent à coalescer rapidement. Ceci est dû à la variation de β qui tend à réduire le gradient de microrotation imposé par la géométrie du problème. Ainsi, le modèle fournit des champs plus diffus et oriente la fissuration dans la direction qui tend à compenser les gradients associés aux extrémités de fissures à gauche et droite du modèle.

Ce test de coalescence démontre la possibilité de prendre en compte des effets d'échelle sur les scénarios de rupture à l'échelle de la structure.

4 Modèle des champs de phase à l'échelle du polycristal

Dans cette section, indépendante de la précédente, nous présenterons la description du formalisme du champ de phase dans le milieu de Cauchy à l'échelle du polycristal. Pour ce faire, nous décrirons les outils nécessaires pour la modélisation de la fissuration intergranulaire et transgranulaire à l'échelle du polycristal et nous présenterons un exemple d'application dans un agrégat polycristallin.

4.1 Fissuration transgranulaire

La fissuration transgranulaire se produit à l'échelle du grain et il est donc nécessaire de pouvoir prendre en compte les caractéristiques de fissuration dans ce milieu.

Pour des cristaux (anisotropes), la propagation des fissures peut se produire dans des plans préférentiels, dits plans de clivage qui nécessite la prise en compte d'un formalisme de directionnalité dans la méthode des champs de phase. Dans ce cas, il est nécessaire d'introduire dans l'expression de la densité de surface fissurée Eq.(1), un terme $\underline{\underline{\omega}}$ qui empêche l'évolution de l'endommagement le long de la direction normale au plan de clivage :

$$\gamma(d, \nabla d, \underline{\underline{\omega}}) = \frac{1}{2l} d^2 + \frac{l}{2} \underline{\underline{\omega}} : (\nabla d \otimes \nabla d)$$

où $\underline{\underline{\omega}}$ est un tenseur du second ordre qui permet la prise en compte de l'anisotropie de rupture, il a été défini par Clayton et Knap [7] comme :

$$\underline{\underline{\omega}} = 1 + \beta(1 - \underline{M} \otimes \underline{M})$$

avec \underline{M} un vecteur unitaire normal au plan de clivage préférentiel et β un facteur utilisé pour pénaliser l'évolution de l'endommagement dans la direction définie par \underline{M} .

Pour prendre en compte la multiplicité des plans potentiels de clivage, nous introduisons autant de champs d'endommagement d_i que de plans de clivage. Ainsi, la surface totale fissurée est exprimée comme une somme des multiples surfaces fissurées. L'énergie libre totale à minimiser s'écrira donc sous la forme :

$$W = W_u(\underline{\underline{\epsilon}}, d_i) + G_c \sum_i \gamma_i(d_i, \nabla d_i, \underline{\underline{\omega}}_i).$$

Le problème à résoudre, pour chaque champ de phase d_i , devient donc à chaque pas de temps :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_i(\underline{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \{ \prod_{j \neq i} (1 - d_j)^2 W_u^+(\underline{x}, \tau) \}, \\ 2(1 - d_i) \mathcal{H}_i - \frac{G_c}{l} (d_i - l^2 (\Delta d_i + \beta_i (\Delta d_i - \underline{M}_i \otimes \underline{M}_i : \nabla \otimes \nabla d_i))) = 0. \end{cases}$$

avec le problème en déplacement associé :

$$\begin{cases} \forall \underline{x}, \forall i, : W_u^+ < W_u^- \Rightarrow d_i = 0, \\ \underline{\sigma} = \frac{\partial W(\underline{\underline{\epsilon}}, d)}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} = \prod_i (1 - d_i)^2 \frac{\partial W_u(\underline{\underline{\epsilon}})}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}. \end{cases}$$

4.2 Fissuration intergranulaire

Ce modèle doit aussi pouvoir être capable de produire de la rupture intergranulaire comme constatée dans les applications physiques. Pour cela, une nouvelle formulation des champs de phase est proposée [16] où un comportement hétérogène dans le polycristal est introduit pour permettre de prendre en compte les caractéristiques spécifiques de la microstructure (notamment la zone de joint de grain). Pour notre modèle, basé sur le critère de Griffith, on propose une variation spatiale du paramètre G_c telle que les joints de grains seront affectés par des valeurs de G_c^{GB} faibles par rapport au cœur des grains. Une variable d'endommagement supplémentaire sera associée à cette zone préférentielle de propagation qui dispose donc d'une interface d'épaisseur e_p plus grande que le paramètre de longueur de régularisation ℓ_d associé à la densité de surface fissurée des joints de grain. La distribution de l'énergie de rupture au voisinage de ces interfaces est basée sur la distance aux joints de grains Ψ et l'épaisseur e_p .

Notre choix de fonction de variation de G_c a porté sur la fonction sinusoïdale vue sa capacité à produire une transition lisse entre G_c^{GB} et le G_c permettant ainsi de capturer les joints de grain sans avoir recours à un maillage numériquement coûteux :

$$G_{cv} = \frac{G_c^B + G_c^{GB}}{2} + \frac{G_c^B - G_c^{GB}}{2} \sin \left(\min \left(\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} + \pi \left(\frac{|\Psi|}{e_p^*} \right)^3 \right) \right).$$

G_c^B est un paramètre numérique, choisi aussi élevé que possible pour activer la variable d'endommagement dédiée aux joints de grains uniquement pour la rupture intergranulaire. Pour les autres variables d'endommagement, l'énergie de rupture est fixée égale à sa valeur physique G_c . e_p^* est une épaisseur fictive choisie de manière à imposer une valeur de G_c sur le bord des joints de grains définie par son épaisseur e_p : $G_{cv}(e_p) = G_c$.

Cette formulation de champ de phase permet de s'affranchir des modèles de zones cohésives (CZM) classiquement adoptés dans la littérature pour simuler les joints de grains ([18], [11]) et intègre tous les mécanismes dans un formalisme de champ de phase cohérent et unifié.

De plus, on propose de pouvoir rendre compte d'hétérogénéité de ténacité des joints de grain, par exemple ici, via l'effet de leurs désorientations θ . Pour ce faire, la formule géométrique suivante [17] est utilisée :

$$G_c^{GBM} = G_c^{GB^{avg}} + \Delta G_c^{GB} \cos(4\theta)$$

où G_c^{GBM} est l'énergie de rupture du joint de grain prenant en compte les effets de la désorientation, $G_c^{GB^{avg}}$ est la valeur moyenne de l'écart de l'énergie de rupture au niveau des joints de grain et ΔG_c^{GB} est l'écart maximal de l'énergie de rupture. Cette fonction donne une variation périodique de G_c^{GB} (simplifiée) avec l'angle de désorientation.

4.3 Application à l'échelle du polycristal

Dans cet exemple numérique, nous étudions les ruptures inter/transgranulaires d'un polycristal. Une structure carrée contenant 10 grains est générée par le logiciel Neper [15]. La géométrie, les conditions aux limites et de chargement, les propriétés matériau et paramètres de champs de phase sont choisis comme dans l'article [16].

Pour étudier les effets de l'hétérogénéité de l'énergie de rupture à l'échelle du polycristal et entre les joints de grains, deux simulations de champ de phase ont été réalisées : (1) $G_c^{GB} = 0.55G_c$; (2) $G_c^{GB} = 0,55G_c$ en tenant compte de la désorientation des joints de grains (variation spatiale représentée sur la Fig.2-(a)). L'énergie de rupture aux joints de grains est choisie de façon à favoriser la rupture transgranulaire dans le premier cas, tandis que dans le second, nous prenons en compte la désorientation des joints de grains pour favoriser la rupture intergranulaire.

Deux plans de clivage cristallographiques sont choisis [1 0] et [0 1] correspondants à deux variables d'endommagement en plus de la variable d'endommagement associée aux joints de grains. On définit une variable d'endommagement équivalente d_{eq} par :

$$d_{eq} = 1 - \prod_i (1 - d_i)$$

Les résultats de propagation des fissures sont représentés sur la Fig.2-(b-c) pour les deux configurations. La Fig.2-(b) montre une rupture inter/transgranulaire, où la fissure change de direction en fonction de l'orientation des grains par le formalisme de la directionnalité. Lorsque la désorientation des joints de grain est prise en compte, la rupture intergranulaire est favorisée Fig.2-(c). Cette dernière figure montre aussi la capacité du modèle proposé à capturer l'amorçage et la coalescence des fissures.

5 Conclusion

Cette contribution étudie la simulation de la fissuration par la méthode des champs de phase avec prise en compte des effets de microstructure. Après une brève présentation de la problématique, nous

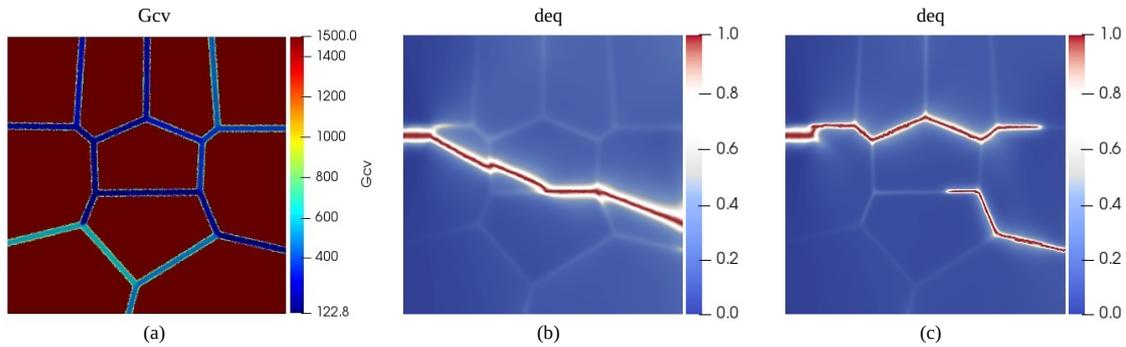


FIGURE 2 – Propagation des fissures dans un polycristal de 10 grains avec une variation spatiale de l'énergie de fissuration : (a) variation spatiale de G_c avec prise en compte de la désorientation, (b) fissuration inter/transgranulaire de la simulation (1), (c) fissuration intergranulaire de la simulation (2).

avons proposé deux approches différentes et indépendantes de prise en compte des effets de microstructure. La première est une formulation de la méthode des champs de phase dans un milieu de Cosserat, ce qui permet d'introduire une longueur interne relative aux caractéristiques de la microstructure. Nous avons pu mettre en évidence dans un exemple numérique de coalescence de fissures, l'impact de cet effet d'échelle sur les interactions entre fissures, et par suite, les processus de coalescence et propagation. Une seconde approche est aussi proposée où la microstructure est prise en compte explicitement. Dans cette configuration, un formulisme unifié de rupture par champ de phase a été proposé pour la prise en compte des types de fissurations inter/transgranulaire ainsi que des potentiels hétérogénéité à l'échelle du polycristal.

Ces différentes simulations, réalisées par des implémentations et des développements sur le logiciel Cast3M du CEA [12], ont pu montrer la possibilité et l'intérêt de la prise en compte des effets de la microstructure pour la simulation du processus de fissuration.

Dans des prochaines études, des couplages entre les différentes approches sont envisagées afin de simuler de façon couplée les différentes échelles du matériau.

Références

- [1] A. Braides. *Approximation of Free-Discontinuity Problems*, Springer Science & Business Media, 1998.
- [2] A. C. Eringen, C. B. Kafadar, *Polar Field Theories*, Continuum Physics, Elsevier, 1–73, 1976.
- [3] B. Bourdin, G. A. Francfort, J-J. Marigo. *The Variational Approach to Fracture*, J Elasticity, 91 (1) : 5-148, 2008.
- [4] B. Bourdin, C.J. Larsen, C. Richardson. *A time-discrete model for dynamic fracture based on crack regularization*, Int J Fract, (168) :133-143, 2021.
- [5] C. Miehe, M. Hofacker, F. Welschinger. *A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits*, (199) : 2765–2778, 2010.
- [6] H. Amor, J-J. Marigo and C. Maurini. *Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, (57) : 1209–1229, 2009.
- [7] J.D. Clayton and J. Knap. *Phase field modeling of directional fracture in anisotropic polycrystals*, Computational Materials Science, (98) : 158–169, 2015.
- [8] G. Molnár and A. Gravouil. *2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture*, Finite Elements in Analysis and Design, (130) :27–38, 2017.
- [9] G. Del Piero, P. Seppecher and S. Forest. *Mécanique des milieux continus généralisés*, Cepadues, 2017.
- [10] M. Ambati, T. Gerasimov and L. De Lorenzis. *A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation*, Computational Mechanics, (55) : 383–405, 2015.
- [11] M. Paggi, M. Corrado and J. Reinoso. *Fracture of solar-grade anisotropic polycrystalline Silicon : A combined phase field-cohesive zone model approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (330) : 123–148, 2018.

- [12] B. Prabel, T. Yuritzinn, T. Charras and A. Simatos. *Propagation de fissures tridimensionnelles dans des matériaux inélastiques avec XFEM dans Cast3m*, 10e Colloque National en Calcul des Structures, CSMA 2011.
- [13] P. Germain. *The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2 : Microstructure*, (25) : 556–575, 1973.
- [14] R. De Borst. *Simulation of strain localization : A reappraisal of the Cosserat Continuum*, Engineering Computations, (8) : 317–332, 1991.
- [15] R. Quey, P.R. Dawson and F. Barbe. *Large-scale 3D random polycrystals for the finite element method : Generation, meshing and remeshing*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (200) : 1729–1745, 2011.
- [16] S. Riad, D. Bardel, J. Réthoré, *Unified phase field model to simulate both intergranular and transgranular failure in polycrystalline aggregates*, Finite Elements in Analysis and Design, 194 : 103555, 2021.
- [17] T. Luther, C. Könke. *Polycrystal models for the analysis of intergranular crack growth in metallic materials*, Engineering Fracture Mechanics, (76) :2332–2343, 2009.
- [18] T-T. Nguyen, J. Réthoré, J. Yvonnet and M-C. Baietto. *Multi-phase-field modeling of anisotropic crack propagation for polycrystalline materials*, Computational Mechanics, (60) :289–314, 2017.